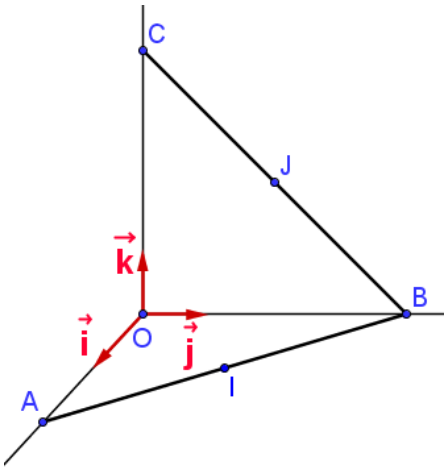
EXERCICE N°1 — 5 points — C2012 — Espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A(2,0,0), B(0,4,0) et C(0,0,4) et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB]et [BC].



1°) Déterminer les coordonnées des points I et J

2°) Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant MI = MJ.

a) Montrer que P est le plan d'équation : $2x - 4z + 3 = 0$.

b) Montrer que la droite (OC) et le plan P sont sécants en un point K que l'on précisera.

3°) Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que :

$$x^2+y^2+z^2-\frac{3}{2}z-5=0$$

a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

b) Vérifier que les points I et J appartiennent à la sphère S.

c) Montrer que S est la seule sphère qui passe par les points I et J et dont le centre est un point de la droite (OC).

4°) Déterminer l'intersection du plan P avec la sphère S.

EXERCICE N°2 — 6 points — P2012 — Analyse

Dans la figure ci-jointe $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur IR_+ par :

$$f(x)=-\frac{x^2+x\ln x+x}{(x+1)^2} \quad \text{pour } x>0 \text{ et } f(0)=0$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses autre que le point O.

1°) a) Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$.

b) Montrer que $\ln\alpha=-(\alpha+1)$.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

2°) On considère la fonction g définie sur $[\alpha\,,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}+1$, et on désigne par $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$.

3°) a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha\,,+\infty[$, $g'(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

4°) a) Montrer que $g(\alpha)=1-\alpha$.

b) Construire alors, le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

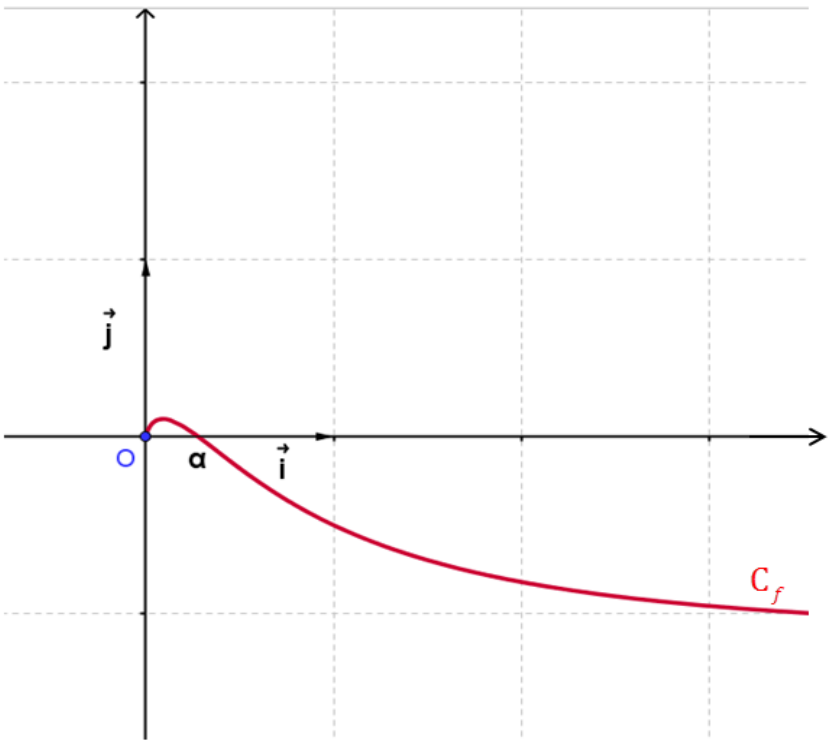
c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$.

5°) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$\int_\alpha^1 f(x)dx=-[x\ g(x)]_\alpha^1+\int_\alpha^1 g(x)\,dx$.

b) En déduire que $\mathcal{A}=\alpha^2-\alpha+1$.



Tous droits réservés © TakiAcademy.com